Curs 8 - Vectori și valori proprii. Teorema de diagonalizare a unui endomorfism de spații liniare

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Vectori și valori proprii ale lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$

Suntem interesaţi să găsim bazele lui V_n în raport cu care matricea unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ să aibă o formă simplă, mai exact să fie o matrice diagonală.

Definiţia 1 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Spunem că vectorul $\vec{x} \neq \vec{0}_V$ din V_n este vector propriu pentru T dacă $\exists\, \lambda \in K$ astfel încât*

$$T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

În acest caz $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu $\vec{x}$.

Teorema 2 *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ admite n vectori proprii liniar independenţi dacă şi numai dacă există o bază a lui V_n astfel încât că matricea A a lui T în această bază să fie de forma*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Demonstrație

Necesitatea "$\Longrightarrow$" Dacă presupunem că T admite n vectori proprii $\vec{v}_i$, $i \in \overline{1,n}$, liniar independenţi, atunci sistemul $\bar{B} = \{\vec{v}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ constituie o bază în V_n şi avem că $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$, $i \in \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că matricea A a lui T în această bază este

$$A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Facem observația că valorile proprii $\lambda_i,\ i \in \overline{1,n}$, nu sunt neapărat distincte.

Suficienţa "$\Longleftarrow$" Dacă există o bază $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ a lui V_n astfel încât matricea A a transformării liniare T în baza B să fie $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, cu $\lambda_i \in K,\ i \in \overline{1,n}$, nu neapărat distincte, atunci avem că $T(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, $\lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,n}$, deci $\vec{e}_i$ sunt n vectori proprii pentru T, liniar independenți, cu valorile proprii λ_i.

Definiţia 3 *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ se numeşte diagonalizabil dacă există o bază B în V_n formată numai din vectori proprii pentru T.*

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ bază a lui V_n şi $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i \neq \vec{0}$ un vector propriu pentru T. Fie $A = (a_i^j)_{i,j\in\overline{1,n}}$ matricea lui T în baza B. Vectorul $\vec{x}$ este vector propriu pentru T, corespunzător valorii proprii $\lambda \Leftrightarrow T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i\right) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} x^i \vec{e}_i \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^i a_i^j\right)\vec{e}_j = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x^i a_i^j = \lambda x^j$, $j \in \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că

$$(A - \lambda I_n)\, X = O \tag{1}$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ în baza B, I_n este matricea unitate de ordin n, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Am obținut astfel rezultatul:

Propoziţia 4 *Vectorul $\vec{x}$ este propriu dacă şi numai dacă matricea coloană X a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza B este soluţie nebanală pentru sistemul liniar şi omogen (1).*

Un sistem omogen de n ecuații liniare cu n necunoscute are și soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul matricii sistemului e nul.

Deci λ e valoare proprie $\Rightarrow$ λ este soluţie a ecuaţiei algebrice de grad n

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Definiţia 5 *Polinomul $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte* ***polinomul caracteristic asociat matricei*** *A, iar ecuaţia $p(\lambda) = 0$ se numeşte* ***ecuaţia caracteristică a matricei*** *A. Cele n rădăcini ale polinomului p se numesc rădăcinile caracteristice ale matricei A.*

Rădăcinile caracteristice ale matricei A aparțin închiderii algebrice a lui K, deci nu se află întotdeauna în K.

Propoziţia 6 *Fie $\lambda \in K$ o rădăcină a ecuaţiei caracteristice $p(\lambda) = 0$ asociată lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Atunci λ este valoare proprie pentru T. Reciproc, dacă λ este valoare proprie pentru T atunci λ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $p(\lambda) = 0$.*

O formulă de calcul pentru polinomul caracteristic al matricei pătratice A este dată în propoziția următoare.

Propoziţia 7 *Polinomul caracteristic al matricei pătratice de ordinul n, A, are expresia*

$$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \delta_1 \lambda^{n-1} + \delta_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n\right),$$

unde δ_k este suma minorilor diagonali de ordinul k ai matricei A. Evident $\delta_1 = Trace(A) = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$ este urma matricei A, iar $\delta_n = \det(A)$.

Pentru demonstrarea formulei, se folosește regula lui Laplace de scriere a unui determinant ca sumă de doi determinanți. Mai exact dacă pentru matricea $A - \lambda I_n$, elementele liniei i se scriu sub forma $b_j^i = c_j^i + d_j^i,\ j \in \overline{1,n}$, notând cu A', A'' matricele obținute din $A - \lambda I_n$ prin înlocuirea elementelor liniei i cu elementele c_j^i, respectiv d_j^i, restul liniilor păstrându-se neschimbate, avem $\det(A - \lambda I_n) = \det A' + \det A''$.

Exemplificăm formula pentru o matrice de ordinul 4.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, avem $\delta_1 = 1 + 2 + 3 + 0 = 6$,

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -40,$$

$\delta_4 = detA = 1$, deci $p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 3\lambda^2 + 40\lambda^3 + 1$.

Dar știm că un endomorfism al lui V_n are matrice diferite în raport cu baze diferite. Ce se întâmplă cu polinoamele caracteristice ale celor două matrice asociate endomorfismului?

Propoziţia 8 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, B, B' baze ale lui V_n, A matricea lui T în baza B și A' matricea lui T în baza B'. Atunci $p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$.*

Demonstrație

Fie S matricea de trecere de la B la B', atunci $A' = S^{-1}AS$. $p_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) = \det\left(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S\right) = \det\left[S^{-1}(A - \lambda I_n)S\right] = \det S^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det S = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$.

Acest rezultat ne permite să introducem următoarele definiții.

Definiţia 9 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ și B o bază oarecare a lui V_n. Se numește polinomul caracteristic al lui T polinomul caracteristic al matricei lui T în baza B. Rădăcinile caracteristice ale lui T sunt rădăcinile polinomului caracteristic al matricei lui T în baza B.*

Mulțimea rădăcinilor caracteristice ale lui T se numește spectrul lui T.

Deci toate rădăcinile caracteristice ale lui T și toți coeficienții δ_k ai lui p sunt invarianți ai lui T.

Revenim la studiul vectorilor proprii ai unui endomorfism. Fie λ o valoare proprie oarecare a lui T. Notăm cu

$$V(\lambda) := \{\vec{x} \in V_n \mid T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

mulţimea tuturor vectorilor proprii ai lui T corespunzători valorii proprii λ, la care am adăugat vectorul nul.

Definiţia 10 *Fie V un K-spațiu liniar, $T \in \mathcal{L}(V)$ și U un subspațiu liniar al lui V, nevid. Spunem că U este invariant prin T dacă $T(U) \subset U$.*

Știm că un operator liniar transformă subspații liniare în subspații liniare. Deci dacă U este invariant prin T, atunci $T(U)$ este chiar subspațiu liniar al lui U.
Observăm că subspațiul liniar generat de un vector prorpiu al lui T este un subspațiu invariant al lui T, 1-dimensional.

Propoziţia 11 *Mulțimea $V(\lambda) := \{\vec{x} \in V_n \mid T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$ este subspațiu liniar al lui V, invariant prin T, de dimensiune $n - rang(A - \lambda I_n)$, unde A e matricea lui T în raport cu o bază a lui V. Mai mult, dacă λ are ordinul de multiplicitate m_λ ca rădăcină caracteristică a lui T, atunci $dimV(\lambda) \leq m_\lambda$.*

Demonstrație

Observăm că $V(\lambda) = Ker(T - \lambda Id_V)$, deci $V(\lambda) \underset{s.l.}{\subset} V$. Deoarece $V(\lambda)$ coincide cu mulțimea soluțiilor sistemului omogen de ecuații liniare $(A - \lambda I_n)X = O$, rezultă că $dimV = n - rang(A - \lambda I_n)$.

Să demonstrăm că $T(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$. Fie $\overrightarrow{u} \in T(V(\lambda)) \Rightarrow \exists \overrightarrow{v} \in V(\lambda)$ a.i. $\overrightarrow{u} = T(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v} \in V(\lambda)$. Cum $\overrightarrow{u}$ a fost ales arbitrar în $T(V(\lambda))$, rezultă că $T(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$.

Presupunem $dimV(\lambda_0) = p$ și $\{\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_p\}$ o bază în $V(\lambda_0)$.

O completăm la o bază $B = \{\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{e}_{p+1}, \cdots, \overrightarrow{e}_n\}$ în V. În raport cu această bază matricea lui T este

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^1_{p+1} & \cdots & a^1_n \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^2_{p+1} & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 & a^p_{p+1} & \cdots & a^p_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^{p+1}_{p+1} & \cdots & a^{p+1}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^n_{p+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^1_{p+1} & \cdots & a^1_n \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^2_{p+1} & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 - \lambda & a^p_{p+1} & \cdots & a^p_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^{p+1}_{p+1} & -\lambda \cdots & a^{p+1}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a^n_{p+1} & \cdots & a^n_n - \lambda \end{vmatrix},$$

deci $p(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^p\, g(\lambda)$, cu $g(\lambda)$ un polinom de grad $n - p$. Rezultă că $p \leq m_{\lambda_0}$.

Definiţia 12 *$V(\lambda)$ se numește subspațiul propriu al lui T corespunzător valorii proprii λ.*

Propoziţia 13 *Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ și $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$valori proprii distincte ale lui T. Fie $\overrightarrow{u}_i \in V(\lambda_i) \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, $i \in \overline{1,p}$. Atunci $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \cdots, \overrightarrow{u}_p\}$ e sistem de vectori liniar independent.*

Demonstrație

Vom aplica inducția matematică după p.

$p = 1$ Deoarece $\overrightarrow{u}_1$ este nenul, rezultă că $\{\overrightarrow{u}_1\}$ e liniar independent.

Presupunem afirmația adevărată pentru k vectori și demonstrăm că e adevărată pentru $k+1$ vectori, $2 \leq k \leq p - 1$.

Fie $\alpha^i \in K$, $i \in \overline{1, k+1}$ a.i.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha^i \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0}. \tag{2}$$

Aplicăm acestei egalități operatorul liniar T, deci $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha^i T(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha^i \lambda_i \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0}. \tag{3}$$

Scădem din (3) relația (2) înmulțită cu λ_{k+1}, deducem

$$\alpha^1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha^k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \overrightarrow{u}_k = \overrightarrow{0}.$$

Din ipoteza inductivă avem $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \cdots, \overrightarrow{u}_k\}$ liniar independenți, deci $\alpha^1 = \cdots = \alpha^k = 0$, care înlocuiți în (2) dau $\alpha^{k+1} \underbrace{\overrightarrow{u}_{k+1}}_{\neq \overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha^{k+1} = 0$. Deci $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \cdots, \overrightarrow{u}_{k+1}\}$ e sistem de vectori liniar independent.

O consecință directă a acestui rezultat ne dă o condiție suficientă pentru ca un endomorfism să fie diagonalizabil.

Teorema 14 *Dacă $T \in \mathcal{L}(V_n)$ are n valori proprii distincte, atunci T este diagonalizabil.*

Demonstrație

Fie $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale lui T, $\overrightarrow{u}_i \in V(\lambda_i) \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, $i \in \overline{1,n}$. Atunci $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \cdots, \overrightarrow{u}_n\}$ e sistem de vectori liniar independent. Dar dimensiunea lui V este n, deci $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \cdots, \overrightarrow{u}_n\}$ e o bază în V_n, formată din vectori proprii ai lui T. Rezultă că $M_B(T) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Definiţia 15 *Spunem că o matrice pătratica, de ordinul n este diagonalizabilă dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală.*

Propoziţia 16 *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Dacă A are toate rădăcinile caracteristice simple și în K, atunci A este diagonalizabilă.*

Rezultatul se demonstrează definind un endomorfsim $T : \mathcal{M}_{n,1}(K) \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $T(X) = AX$. Acesta are matricea A în raport cu baza canonică a lui $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. Deci putem aplica teorema precedentă, de unde reiese că T e diagonalizabil. Deci există o bază formată din vectori proprii ai lui T în raport cu care matricea lui T e diagonală. Dar A e asemenea cu aceasta, deci am obținut concluzia teoremei.

În sfârșit putem formula și demonstra rezultatul cel mai important al acestui curs.

Teorema 17 ***(de diagonalizare a unui endomorfism)*** *Operatorul $T \in \mathcal{L}(V_n)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt satisăcute:*

(i) rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt toate din K,

(ii) ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii λ_i este egal cu dimensiunea subspaţiului propriu $V(\lambda_i)$.

Demonstrație

"$\Longrightarrow$" Presupunem că T este diagonalizabil. Fie $B = \{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_n\}$ baza formată din vectori proprii ai lui T. Fie $\lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,p}$ valorile proprii ale lui T, distincte. Putem presupune că primii m_1 vectori ai bazei corespund valorii proprii λ_1, următorii m_2 vectori corespund valorii proprii λ_2, etc, ultimii m_p vectori corespund valorii proprii λ_p Deci $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$.

$$M_B(T) = diag\left(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{m_2}, \cdots, \underbrace{\lambda_p, \cdots, \lambda_p}_{m_p}\right),$$

deci $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, de unde deducem că m_i e ordinul de multiplicitate al lui λ_i, $\forall i \in \overline{1,p}$ și rădăcinile caracteristice ale lui T sunt $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ și ele sunt din K. Deoarece $m_1 + \cdots + m_p = n$, rezultă că acestea sunt toate rădăcinile caracteristice ale lui T.

Am presupus că $\{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1}\} \subset V(\lambda_1)$. Deoarece $\{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1}\} \subset B$ și B este bază a lui V, rezultă că $\{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1}\}$ sunt liniar independenţi. Deci $dimV(\lambda_1) \geq m_1$. Dar am demonstrat anterior că $dimV(\lambda_1) \leq m_1$, deci $dimV(\lambda_1) = m_1$. Analog se arată că $dimV(\lambda_i) = m_i$, $\forall i \in \overline{2,p}$.

"$\Longleftarrow$" Presupunem că au loc condițiile (i) și (ii). Din (i) rezultă că toate rădăcinile caracteristice ale lui T sunt valori proprii, fie acestea $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ cu multiplicitățile $m_1, \cdots, m_p$. Deci $m_1 + \cdots + m_p = n$.

Alegem câte o bază în fiecare $V(\lambda_i)$ și considerăm mulțimea formată din toți vectorii acestor baze. Vom demonstra că aceasta e o bază pentru V_n. Evident matricea lui T în această bază e diagonală.

Deci fie $\{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1}\}$ bază a lui $V(\lambda_1)$, $\{\overrightarrow{u}_{m_1+1}, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1+m_2}\}$ bază a lui $V(\lambda_2)$, etc, $\left\{\overrightarrow{u}_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}, \cdots, \overrightarrow{u}_n\right\}$ bază a lui $V(\lambda_p)$.

Fie $B = \{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_n\}$. Demonstrăm că B e sistem de vectori liniar independent. Fie $\alpha^i \in K, i \in \overline{1,n}$ a.i. $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\alpha^1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha^{m_1}\overrightarrow{u}_{m_1}}_{:=\overrightarrow{v}_1} + \underbrace{\alpha^{m_1+1}\overrightarrow{u}_{m_1+1} + \cdots + \alpha^{m_1+m_2}\overrightarrow{u}_{m_1+m_2}}_{:=\overrightarrow{v}_2} + \cdots + \underbrace{\alpha^{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}\overrightarrow{u}_{m_1+\cdots m_{p-1}+1} + \cdots + \alpha^n\overrightarrow{u}_n}_{:=\overrightarrow{v}_p} = \overrightarrow{0}.$$

+Deoarece $V(\lambda_i)$ sunt subspații liniare ale lui V, rezultă că $\overrightarrow{v}_i \in V(\lambda_i)$, $\forall i \in \overline{1,p}$, deci fiecare vector $\overrightarrow{v}_i$ este fie vectorul nul, fie vector propriu corespunzător valorii proprii λ_i. Dacă ar fi a doua situaţie, ar rezulta că $\{\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_p\}$ sunt liniar independenţi, ei fiind vectori proprii corespunzători unor valori proprii distincte. Dar acest lucru contrazice $\overrightarrow{v}_1 + \cdots + \overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{0}$. Deci $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{0}$, $\forall i \in \overline{1,p}$.

$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha^1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \alpha^{m_1}\overrightarrow{u}_{m_1} = \overrightarrow{0}$. Dar $\{\overrightarrow{u}_1, \cdots, \overrightarrow{u}_{m_1}\}$ sunt liniar independenţi, deci $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m_1} = 0$. Analog se arată că toți scalarii α^i sunt nuli.

Deci B e sistem de vectori liniar independent. Deoarece acesta conține n vectori și $dimV = n$, rezultă că B e bază. În raport cu ea, matricea lui T este $diag\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, \cdots, \lambda_p)$.

Teorema de diagonalizare pentru matrice pătratice este o consecință imediată a teoremei anterioare.

Propoziția 18 *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\{\lambda_i\}_{i\in\overline{1,p}}$ rădăcinile caracteristice ale lui A de multiplicități $m_1, \cdots, m_p$. Atunci A este diagonalizabilă dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile*

(i) rădăcinile caracteristice ale lui A sunt toate din K,

(ii) $n - rang\,(A - \lambda_i I_n) = m_i$, $\forall i \in \overline{1,p}$.

Algoritmul practic de diagonalizare a unui endomorfism (a unei matrici pătratice)

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism şi o bază B în V_n. Să notăm cu A matricea lui T în baza B.

Se rezolvă ecuaţia caracteristică $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Dacă această ecuaţie are rădăcini care nu sunt din K atunci condiţia (i) din teorema precedentă nu este satisfăcută, deci endomorfismul T nu este diagonalizabil.

Dacă toate rădăcinile sunt din K atunci pentru fiecare valoare proprie λ_i se determină subspaţiul propriu $V(\lambda_i)$ astfel. Se identifică orice vector din V_n cu matricea coloană X a coordonatelor sale în baza considerată B a lui V_n, se consideră sistemul liniar şi omogen

$$(A - \lambda_i I_n) X = 0.$$

Se rezolvă sistemul, determinându-se astfel $V(\lambda_i)$, se pune în evidenţă câte o bază în fiecare subspaţiu propriu $V(\lambda_i)$, aflând astfel $\dim V(\lambda_i)$.

Dacă există o valoare proprie λ_i pentru care $\dim V(\lambda_i)$ este mai mică strict decât ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiţia (ii) din teorema precedentă nu este satisfăcută, deci endomorfismul T nu este diagonalizabil.

Dacă $\dim V(\lambda_i)$ este egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ_i pentru toate valorile proprii, atunci condiţia (ii) din teorema precedentă este satisfăcută deci endomorfismul T este diagonalizabil.

În acest caz baza $\bar{B}$, formată din reuniunea bazelor tuturor subspaţiilor proprii determinate anterior, este bază a lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului T are forma diagonală $diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, unde valoarea proprie λ_i se repetă de atâtea ori cât este ordinul ei de multiplicitate.

Observăm că dacă un endomorfism T nu este diagonalizabil, subspațiul de dimensiune maximă al lui V, invariant prin T, (dar diferit evident de V) este suma directă a tuturor subspațiilor proprii ale endomorfimului.

Exercițiul 19 *Să se verifice că endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de*

$$T(\vec{x}) = \left(4x^1 + 6x^2, -3x^1 - 5x^2, -3x^1 - 6x^2 + x^3\right), \ \forall\, \vec{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$$

este diagonalizabil şi să se determine o bază $\bar{B}$ a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care matricea lui T are forma diagonală.

Fie B baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Calculăm $T(\vec{e}_i)$ şi obţinem

$$T(\vec{e}_1) = (4, -3, -3), \ T(\vec{e}_2) = (6, -5, -6), \ T(\vec{e}_3) = (0, 0, 1)$$

deci matricea endomorfismului în baza B, care se formează punând coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B pe coloană, este

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a matricei A este $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ adică, efectuând calculele,

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

Deci rădăcinile caracteristice ale lui T sunt $\lambda_1 = 1$, rădăcină multiplă de ordin 2 şi $\lambda_2 = -2$, rădăcină simplă. Deoarece valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ obţinem că este satisfăcută condiţia (i) din teoremă.

Vom determina acum subspaţiile proprii $V(1)$ şi $V(2)$ corespunzătoare celor două valori proprii găsite.

Avem $V(1) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) \mid (A - I_3) X = 0\}$ şi dacă rezolvăm sistemul liniar şi omogen $(A - I_3) X = 0$ obţinem soluţia

$$X = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Deci $V(1)$ este generat de vectorii liniari independenţi $\vec{f_1} = (-2, 1, 0)$, $\vec{f_2} = (0, 0, 1)$ şi prin urmare $B_1 = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ este bază în $V(1)$, deci $\dim V(1) = 2$.

Analog $V(-2) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) \mid (A + 2I_3) X = 0\}$ şi dacă rezolvăm sistemul liniar şi omogen $(A + 2I_3) X = 0$ obţinem soluţia

$$X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Deci $V(-2)$ este generat vectorul nenul $\vec{f_3} = (-1, 1, 1)$ şi prin urmare $B_2 = \{\vec{f_3}\}$ este bază în $V(-2)$, deci $\dim V(-2) = 1$.

Deci $\dim V(1) = 2 =$ ordinul de multiplicitate al lui λ_1 şi $\dim V(-2) = 1 =$ ordinul de multiplicitate al lui λ_2. Deci şi condiţia (ii) este îndeplinită.

Prin urmare endomorfismul este diagonalizabil şi baza $\bar{B} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ este cea în raport cu care matricea lui T are forma $diag(1, 1, -1)$, deoarece $T(\vec{f_1}) = \vec{f_1}$, $T(\vec{f_2}) = \vec{f_2}$, $T(\vec{f_3}) = -\vec{f_3}$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

1.1 Exerciţii

1. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1 - x^2, x^2 + x^3, x^1 + x^3\right)$. Determinaţi nucleul lui T precum şi valorile şi vectorii proprii. Este T diagonalizabil?

   Rezolvare:

   Vom determina, mai întâi, matricea transformării liniare T în raport cu baza canonică B_c a lui $\mathbb{R}^3$, $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Calculăm $T(\vec{e}_i)$ şi obţinem

$$T(\vec{e}_1) = (1, 0, 1)\,, \ T(\vec{e}_2) = (-1, 1, 0)\,, \ T(\vec{e}_3) = (0, 1, 1)\,,$$

   deci matricea endomorfismului în baza canonică B_c, care se formează punând coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B_c pe coloană, este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Prin definiţie

$$\operatorname{Ker}(T) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

   Deci $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(T)$ dacă şi numai dacă $T(\vec{x}) = \vec{0}$ ceea ce se reduce la sistemul

$$\begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + x^3 = 0. \end{cases}$$

   Rangul matricei sistemului este $rang A = 2$ deoarece $\det A = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Sistemul se reduce, notând cu $\alpha := x^3 \in \mathbb{R}$, la

$$\begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ x^2 = -\alpha. \end{cases}$$

   care are soluţia $\{(-\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Deci

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{-\alpha(1, 1, -1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

   Prin urmare $\operatorname{Ker}(T) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (vectorul $(1, 1, -1)$ formează o bază în acest subspaţiu).
   Pentru a determina valorile proprii scriem ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0. \tag{4}$$

   Obţinem echivalent

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 3\right) = 0$$

   care are soluţiile $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Deci valoare proprie este doar $\lambda_1 = 0 \in K = \mathbb{R}$ (deoarece $\lambda_{2,3} \notin \mathbb{R}$).

Avem

$$V(0) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}\right\} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = \operatorname{Ker}(T).$$

Deci

$$V(0) = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{-\alpha(1,1,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(0) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1.
Observăm că T nu este diagonalizabil, deoarece T are rădăcini caracteristice care nu sunt reale. Subspațiul maximal invariant prin T este $V(0)$.

2. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1, x^2 + x^3, 2x^3\right)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii, subspaţiile invariante în raport cu T care au dimensiunea 1. Este T diagonalizabil?

Rezolvare:

Vom determina, mai întâi, matricea transformării liniare T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Scriem

$$T(\vec{e}_1) = (1,0,0), \ T(\vec{e}_2) = (0,1,0), \ T(\vec{e}_3) = (0,1,2),$$

deci matricea endomorfismului în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0.$$

Rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber. Găsim că $\lambda_1 = 1$ este rădăcină. Folosind schema lui Horner obţinem

$$-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = (\lambda-1)\left(-\lambda^2+3\lambda-2\right) = (\lambda-1)(\lambda-1)(-\lambda+2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ de multiplicitate 2 şi $\lambda_2 = 2$ de multiplicitate 1, ambele reale.
Determinăm

$$V(\lambda_1) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x}\right\} = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - I_3)X = 0\right\}$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen

$$(A - I_3)X = 0 \tag{5}$$

adică

$$\begin{cases} 0 \cdot x^1 = 0 \\ 0 \cdot x^2 + x^3 = 0 \\ 1 \cdot x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{x^3 = 0\right.$$

care are soluţia $\{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
Deci

$$V(1) = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 (iar vectorii $\vec{e}_1 = (1,0,0)$ şi $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Determinăm

$$V(2) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = 2\vec{x}\right\} = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 2I_3)X = 0\right\},$$

deci sistemul liniar şi omogen (5) devine

$$\begin{cases} (-1) \cdot x^1 = 0 \\ (-1) \cdot x^2 + x^3 = 0 \\ 0 \cdot x^3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0,\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(2) = \{(0,\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Știm că $V(\lambda)$ sunt subspații invariante prin T. Deci $V(1)$ şi $V(2)$ sunt subspaţii invariante în raport cu T. Dacă dorim subspaţii invariante în raport cu T de dimensiune 1, atunci luăm

$$V^1 = \{\alpha(1,0,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \; V^2 = \{\beta(0,1,0) \mid \beta \in \mathbb{R}\}, \; V^3 = \{\alpha(0,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

care sunt invariante şi de dimensiune 1.

Observăm că toate rădăcinile caracteristice ale lui T sunt reale și că $dim V(1) = 2 = m_1$ și $dim V(2) = 1 = m_2$. Deci T este diagonalizabil.

În raport cu baza $\{\vec{e}_1 = (1,0,0) \, şi \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{v}_3 = (0,1,1)\}$, matricea lui T este $diag(1,1,2)$.

3. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T\left(x^1,x^2,x^3\right) = \left(x^3,x^2,-x^1-x^3\right)$. Este T diagonalizabil? Determinaţi subspaţiile invariante în raport cu T care au dimensiunea 1 dar și dimensiunea maximă (diferite de $\mathbb{R}^3$).

   Rezolvare:

   Matricea transformării liniare T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow$

   $$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(1+\lambda+\lambda^2\right) = 0.$$

   Obţinem valoarea proprie $\lambda_1 = 1$ (soluţiile $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ nu sunt valori proprii, $\lambda_{2,3} \notin \mathbb{R}$). Deci T nu este diagonalizabil.

   Determinăm

   $$V(1) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{x}\right\} = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - I_3)X = 0\right\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen $(A - I_3)\, X = 0$,

$$\begin{cases} -x^1 + x^3 = 0 \\ -x^1 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(1) = \{\alpha\,(0,1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1, invariant prin T. (vectorul $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ formează o bază în acest subspaţiu). El coincide cu subspațiul maximal invariant prin T.

4. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărui matrice în raport cu baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Demonstrați că endomorfismul T este diagonalizabil. Determinați baza în raport cu care T are matricea diagonală.

Rezolvare:

Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Rădăcinile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber. Găsim că $\lambda_1 = 2$ este rădăcină. Folosind eventual schema lui Horner obţinem

$$-\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10 = (\lambda-2)\left(-\lambda^2+4\lambda+5\right) = (\lambda-2)(\lambda+1)(-\lambda+5) = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5)\,.$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ şi $\lambda_3 = 5$ (evident $\lambda_i \in K := \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$).
Deoarece toate rădăcinile caracteristice sunt reale și simple (ordin de multiplicitate 1), rezultă că T este diagonalizabil. (Avem o teoremă ce ne permite să ajungem rapid la această concluzie, fără a verifica faptul că dimensiunea fiecărui subspațiu propriu este 1).

Vom determina acum subspaţiile proprii $V(\lambda)$ corespunzătoare valorilor proprii λ găsite.

Determinăm $V(2)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A - 2I_3)\, X = 0$, adică

$$\begin{cases} -x^1 - 2x^2 = 0 \\ -2x^1 - 2x^3 = 0 \\ -2x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $\{(-\alpha, \alpha/2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Deci

$$V(2) = \left\{ \frac{-\alpha}{2}\,(2,-1,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2,-1,-2)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Similar, determinăm $V(-1)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen

$$(A + I_3)\, X = 0$$

adică

$$\begin{cases} 2x^1 - 2x^2 = 0 \\ -2x^1 + 3x^2 - 2x^3 = 0 \\ -2x^2 + 4x^3 = 0 \end{cases}$$

Deci

$$V(-1) = \{(2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(2,2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(-1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2,2,1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

Similar, determinăm $V(5)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} -4x^1 - 2x^2 = 0 \\ -2x^1 - 3x^2 - 2x^3 = 0 \\ -2x^2 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

Deci

$$V(-1) = \left\{ \frac{\alpha}{2}(1,-2,2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

prin urmare $V(-1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (1,-2,2)$ formează o bază în acest subspaţiu).

$\bar{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(2,-1,-2), (2,2,1), (1,-2,2)\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care T are forma diagonală, deoarece $T(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$, $T(\vec{v}_3) = 5\vec{v}_3$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\begin{aligned} \bar{A} &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T(x^1, x^2, x^3) = \left(-3x^1 + 2x^2, -5x^1 + 4x^2, 2x^1 - 2x^2 - x^3\right)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T. Studiaţi dacă endomorfismul T este diagonalizabil.

   Rezolvare:

   Citim matricea în baza canonică

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0.$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1$, $m_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 2$, $m_2 = 1$ (care sunt toate din câmpul $\mathbb{R}$).
Determinăm $V(\lambda)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A - \lambda I_3) X = 0$, adică

$$\begin{cases} (-3-\lambda)x^1 + 2x^2 = 0 \\ -5x^1 + (4-\lambda)x^2 = 0 \\ 2x^1 - 2x^2 + (-1-\lambda)x^3 = 0 \end{cases}$$

Pentru $\lambda = -1$ obţinem sistemul

$$\left\{ x^1 - x^2 = 0 \right.$$

care are soluţia $\{(\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
Deci

$$V(-1) = \{\alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $V(-1) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 (iar vectorii $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ şi $\vec{v}_2 = (0,0,1)$ formează o bază în acest subspaţiu).
Pentru $\lambda = 2$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} -5x^1 + 2x^2 = 0 \\ 2x^1 - 2x^2 - 3x^3 = 0 \end{cases}$$

Deci

$$V(2) = \left\{ \left(-\alpha, -\frac{5}{2}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{-\alpha}{2}(2,5,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

prin urmare $V(2) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v} = (2,5,-2)$ formează o bază în acest subspaţiu).
Folosim acum teorema de diagonalizare a unui endomorfism. Avem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = \overline{1,2}$, $\dim V(-1) = 2 = m_1$ şi $\dim V(2) = 1 = m_2$.
Deci endomorfismul dat este diagonalizabil şi $\bar{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,1,0), (0,0,1), (2,5,-2)\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care T are forma diagonală, deoarece $T(\vec{v}_1) = -\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$, $T(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\begin{aligned} \bar{A} &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de $T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(2x^1, x^1 + 4x^2 - 2x^3, 7x^1 + 7x^2 - 5x^3\right)$. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T. Studiaţi dacă endomorfismul T este diagonalizabil.

   Rezolvare:

   Matricea lui T în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 7 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

   Pentru a determina valorile proprii rezolvăm ecuaţia caracteristică a transformării T,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 7 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow -\left(\lambda - 2\right)^2\left(\lambda + 3\right) = 0.$$

   Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 2$ şi $\lambda_2 = -3$, $m_2 = 1$ (care sunt toate din câmpul $\mathbb{R}$).

   Determinăm $V\left(\lambda\right)$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $\left(A - \lambda I_3\right)X = 0$.

   Pentru $\lambda = 2$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 0 \cdot x^1 = 0 \\ x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0 \\ 7x^1 + 7x^2 - 7x^3 = 0 \end{cases}$$

   Deci

$$V\left(2\right) = \left\{\left(0, \alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\alpha\left(0, 1, 1\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

   prin urmare $V\left(2\right) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$ formează o bază în acest subspaţiu).

   Pentru $\lambda = -3$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 5x^1 = 0 \\ x^1 + 7x^2 - 2x^3 = 0 \\ 7x^1 + 7x^2 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

   Deci

$$V\left(-3\right) = \left\{\left(0, 2\alpha/7, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{7}\left(0, 2, 7\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

   prin urmare $V\left(-3\right) \subset \mathbb{R}^3$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 (iar vectorul $\vec{v}_2 = (0, 2, 7)$ formează o bază în acest subspaţiu).

   Folosim acum teorema de diagonalizare a unui endomorfism. Avem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = \overline{1, 2}$ dar $\dim V\left(\lambda_1\right) = \dim V\left(2\right) = 1 \neq 2 = m_1$.

   Deci endomorfismul dat nu este diagonalizabil (nu este necesar să mai verificăm şi pentru a doua valoare proprie).

   Subspațiul maximal invariant prin T este $V(2) \oplus V(-3)$. Vom vedea în cursul următor că există o bază, numită Jordan, în raport cu care matricea lui T are o formă relativ simplă chiar dacă nu e una diagonală.